Numéro de table :	Promotion 2021

ISUPFERE – EXAMEN DE MATHEMATIQUES

DUREE : 1H15

Cet énoncé doit être remis avec la copie : merci de bien veiller à inscrire votre numéro de table sur l'énoncé.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4[$, par $f(x) = 10x + ln(4 - x) - \ln 4$

On note C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f(0)$

2. a) déterminer $\lim_{x \to 4} f(x)$
   b) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote dont on précisera une équation

3. On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 4[$
   Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 4[$, on a $f'(x) = \frac{39-10x}{4-x}$

4. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4[$.

5. Justifier que la fonction f atteint un maximum en 3,9.
   Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.

6. Tracer l'allure de C_f sur l'intervalle $[0; 4[$.

EXERCICE 2

En plein hiver, en Europe, une maison est chauffée à 20 °C. La température extérieure est notée T. Dans tout l'exercice, on suppose que $T < 20$.

Lorsque le chauffage est coupé, la température intérieure diminue par perte de chaleur. On modélise cette situation par une suite (U_n) dont le terme général U_n désigne la température intérieure de la maison n heures après la coupure du chauffage.

Pour une maison en maçonnerie traditionnelle et une température extérieure T constante, on admet que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 0{,}99\, U_n + \frac{T}{100} \qquad \text{et} \qquad U_0 = 20$$

1. Calculer les termes U_1 et U_2

2. Montrer que, dans ce cas, la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire que pour tout entier n, $U_n = 20 \times 0{,}99^n$

4. Déterminer la limite de (U_n). Justifier

5. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $U_n < 5$
   b) En déduire le nombre de jours à partir duquel la température intérieur est descendue en dessous de 5°C .

EXERCICE 3

Remarque : la question 4. est indépendante des autres questions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = xe^{-x^2+1}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$
   b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet sur $[0; +\infty[$ exactement 2 solutions notées α et β (avec $\alpha < \beta$).
   b) En déduire les solutions sur $[0; +\infty[$ de l'inéquation $f(x) \geq 0{,}5$.

4. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe (C) d'abscisses respectives $+x$ et $-x$.
   a) Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.
   b) Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?