

Méthode de flexibilité pour la mécanique du contact

Formulée par éléments finis et éléments de frontière et accélérée par matrices hiérarchiques

Y. Boye¹, J. Bleyer², S. Chaillat³, V. A. Yastrebov¹

¹ Centre des Matériaux, Mines Paris – PSL, CNRS UMR 7633, Versailles, France

² Laboratoire Navier, ENPC, Institut Polytechnique de Paris, Champs-sur-Marne, France

³ Laboratoire POEMS, CNRS–ENSTA–INRIA, Institut Polytechnique de Paris, Palaiseau, France

Résumé

La mécanique du contact constitue un problème fondamental en mécanique des solides, omniprésent dans de nombreuses applications industrielles et scientifiques. Bien que son cadre théorique soit solidement établi depuis les travaux fondateurs de Hertz, Signorini et Fichera [1, 2, 3], sa résolution numérique demeure délicate en raison du caractère non linéaire et non différentiable des conditions de contact.

Les approches numériques classiques du contact, telles que la pénalisation, les multiplicateurs de Lagrange ou le Lagrangien augmenté, présentent des limitations bien connues [5, 6]. La méthode de pénalisation, bien que simple à implémenter, autorise l’interpénétration et nécessite un choix délicat du paramètre de pénalisation : une valeur trop faible conduit à un comportement non physique, tandis qu’une valeur trop élevée entraîne un mauvais conditionnement du système. Les formulations à multiplicateurs de Lagrange imposent exactement les contraintes de contact, mais au prix de l’introduction de nouvelles inconnues et d’une formulation de type point-selle, plus contraignante numériquement.

Une alternative élégante est fournie par la *méthode de flexibilité*, introduite par Francavilla et Zienkiewicz [4], qui permet, dans le cadre des petites déformations, de reformuler le problème de contact sous la forme d’un problème de complémentarité linéaire (LCP). Elle repose sur un opérateur linéaire de contact S_c , reliant les pressions normales aux déplacements normaux associés sur la surface de contact potentielle, et correspondant à la restriction de l’opérateur de Neumann–Dirichlet (ou de Steklov–Poincaré) à cette zone.

Ce LCP peut être résolu efficacement à l’aide de solveurs directs, tels que l’algorithme de Lemke, ou de solveurs itératifs, comme le gradient conjugué contraint.

L’un des principaux atouts de cette approche réside dans son caractère non intrusif. Le calcul des pressions de contact est découplé de la résolution du problème mécanique global : les efforts de contact sont déterminés indépendamment, puis réinjectés sous forme de conditions de Neumann dans un solveur standard par éléments finis ou par éléments de frontière. Cette stratégie permet de préserver l’architecture des codes existants tout en offrant un cadre robuste pour le traitement des problèmes de contact.

Une attention particulière est portée à la construction numérique de l’opérateur de flexibilité S_c . Trois stratégies sont considérées : une condensation par complément de Schur à partir de la matrice de raideur éléments finis, une approche par échantillonnage fondée sur la réponse à des chargements unitaires sur la zone de contact, et une formulation par méthode des éléments de frontière basée sur l’identité de Somigliana et les solutions fondamentales de Kelvin [7].

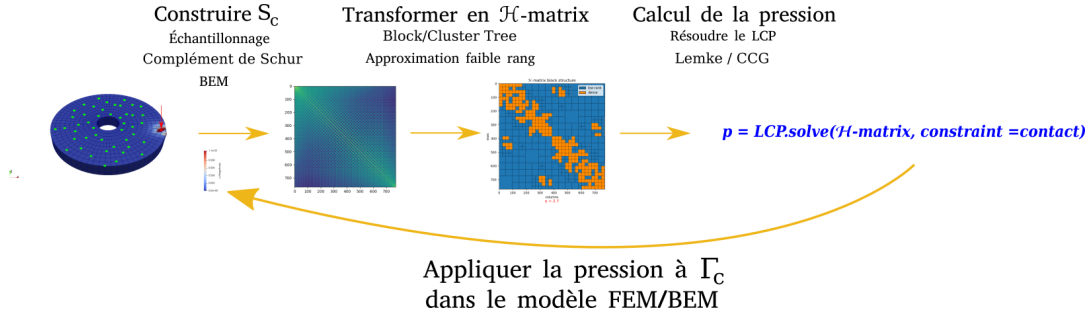


FIGURE 1 – Principe de la méthode de flexibilité pour le contact : l’opérateur S_c relie les pressions normales aux déplacements normaux sur la surface de contact potentielle.

Bien que ces constructions soient équivalentes en précision, elles conduisent toutes à une matrice de contact S_c dense, dont le stockage et la manipulation deviennent rapidement prohibitifs pour des problèmes de grande taille. Pour surmonter cette limitation, nous recourons à une compression par matrices hiérarchiques ($\mathcal{H}$ -matrices) [8], exploitant le faible rang des interactions lointaines. L’opérateur dense est ainsi approximé par une structure hiérarchique à blocs, permettant des coûts mémoire et des produits matrice–vecteur de complexité quasi-linéaire.

Les performances et la robustesse de l’approche sont évaluées au moyen de plusieurs études numériques. Les différentes stratégies de construction de l’opérateur S_c sont comparées dans un cadre éléments finis, mettant en évidence une excellente concordance des opérateurs obtenus. La méthode est enfin validée sur le problème classique de Hertz du contact sphère–demi-espace élastique [1], pour lequel les pressions de contact numériques convergent vers la solution analytique avec le raffinement du maillage.

Les développements futurs portent sur l’extension au contact déformable–déformable, l’introduction du frottement, ainsi que sur une intégration renforcée avec des bibliothèques éléments finis ouvertes telles que FEniCSx, MFEM et A-Set.

Références

- [1] H. Hertz, *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92 (1882), 156–171.
- [2] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini*, Atti Accad. Naz. Lincei, 36 (1964), 75–83.
- [3] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod / Springer, 1976.
- [4] A. Francavilla, O. C. Zienkiewicz, *A note on numerical computation of elastic contact problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 9 (1975), 913–924.
- [5] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Springer, 2006.
- [6] V. A. Yastrebov, *Numerical Methods in Contact Mechanics*, Wiley, 2013.
- [7] M. Bonnet, *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, Wiley, 1999.
- [8] W. Hackbusch, *Hierarchical Matrices : Algorithms and Analysis*, Springer, 2015.

Modélisation et simulation de l'endommagement des propergols par une approche micromécanique sous chargement quasi-statique

Matteo Aprili^{1,2}, Jacques Besson¹, Christophe Bovet^{1,2} Anna Ask² Olivier Voreux²

¹Centre des Matériaux, Mines Paris

²DMAS, ONERA, Université Paris-Saclay 92320, Châtillon, France

Les propergols sont des matériaux énergétiques utilisés dans les moteurs de fusée ou de missiles. Ces matériaux sont composés de charges énergétiques enrobées d'un liant élastomère. Contrairement aux élastomères chargés classiquement utilisés dans l'industrie, ces charges ne visent pas à améliorer la tenue mécanique du matériau mais à maximiser ses performances énergétiques. Un fort taux de charge est donc recherché. Le cycle de vie du moteur de sa fabrication à sa mise en service peut être long. Les sollicitations mécaniques subies lors des différentes phases (démoulage, stockage, mission de vol, lancement) peuvent conduire à un endommagement du matériau et altérer le fonctionnement nominal du moteur. Les deux mécanismes d'endommagement les plus fréquents sont la décohésion liant-charges et l'apparition, la croissance et la coalescence de cavités dans le liant. À l'ONERA deux projets ont abordé cette thématique : MOVIE (2016-2020) et FLIBUSTIER (2020-2024); réunissant chimistes, mécaniciens des fluides et des solides. Cette thèse s'inscrit dans la continuité du PRF FLIBUSTIER.

Dans ce contexte, cette thèse vise à mieux comprendre et à modéliser le comportement mécanique des propergols lors de chargements quasi-statiques, ce qui correspond essentiellement aux phases de stockage du matériau. Cette compréhension suit une approche micromécanique : une étude par modélisation et simulation numérique de Volumes Élémentaires Représentatifs (VERs) en 3D de propergols est faite, permettant ainsi d'obtenir un comportement mécanique homogénéisé du matériau exploitable à l'échelle macroscopique.

Les propergols sont des matériaux complexes à modéliser et simuler. La description fine du comportement doit tenir compte du caractère fortement multi-échelle induit par la distribution de taille des charges (allant de quelques μm à plusieurs centaines de μm) et conduit à des maillages de grandes tailles : 5 M d'éléments tétraédriques au minimum pour un VER. Les travaux présents dans la littérature simplifient souvent les VERs : la fraction volumique reste celle d'un propergol réel mais le nombre de tailles de charges et le ratio entre les taille de charges sont fortement restreints [1][3]. Seul Jiaxiang[2] présente des résultats de VERs 3D de plus de 10M d'éléments issus de calculs HPC (1000 coeurs).

De plus les propergols sont des matériaux fortement hétérogènes : le ratio entre les modules d'Young des charges et de la matrice est d'environ 10^5 , ce qui amène un mauvais conditionnement des systèmes éléments finis. Le comportement hyperélastique quasi-incompressible du liant invalide l'hypothèse des petites perturbations, et nécessite donc une formulation d'éléments finis mixtes en déplacement, pression et variation de volume dans un formalisme grandes déformations présent dans la suite Z-set (www.zset-software.com/). La grande difficulté de la modélisation hyperélastique est la convergence des calculs. L'une des causes est la présence d'éléments trop distordus. Les zones de liant coincées entre deux charges proches l'une de l'autre mènent à de très importantes déformations locales et donc à ces éléments distordus.

Le but de ces travaux est d'améliorer la représentativité des volumes élémentaires modélisés et simulés avec des calculs parallèles par décomposition de domaines. Ce travail s'appuie sur des outils numériques à l'état de l'art pour les solveurs HPC et la génération des maillages. Une partie de la présentation lors du séminaire portera sur l'homogénéisation dans le cadre des petites déformations, sans effet de vitesse et sans endommagement. Il sera également vu que les effets de vitesses ne peuvent être ignorés et ce qui est actuellement fait pour les prendre en compte. Une ouverture sera faite sur la modélisation et la simulation de VERs en grandes déformations en cours. Pour ces cas plus complexes, le remaillage à partir de critères de qualité pour des maillages d'ordre 2 et l'interpolation de champs sont actuellement à l'étude.

References

- [1] F. de Francqueville, J. Diani, P. Gilormini, and A. Vandenbroucke. Use of a micromechanical approach to understand the mechanical behavior of solid propellants. *Mechanics of Materials*, 153:103656, Feb. 2021.

- [2] W. Jiayang, Q. Hongfu, P. Shudi, and L. Shiqi. Experimental and simulation study on micro damage of HTPB propellant under multi angle tensile shear loading. *Polymer Testing*, 148:108841, July 2025.
- [3] Y. Liu, W. Qian, L. Wang, Y. Xue, C. Hou, and S. Wu. In situ X-ray tomography study on internal damage evolution of solid propellant for carrier rockets. *Materials Science and Engineering: A*, 882:145451, Aug. 2023.

Description of thermal shocks using micromorphic variational cohesive gradient damage models discretized by the Hybrid High-Order method.

Nava Soto P.^{1,2,*}, Helfer T.¹, Scherer J.-M.², Fandeur O.³, Jaccon A.³ and Besson J.²

¹ CEA, DES, IRESNE, DEC, SESC, LMCP Département d'Études des Combustibles

² Mines Paris, Université PSL, Centre des Matériaux (MAT), UMR7633 CNRS

³ Université Paris-Saclay, CEA, Département de Modélisation des Systèmes et Structures

Abstract

The classical AT1 and AT2 phase-field models [1, 7] successfully introduced variational gradient damage models to describe brittle fracture. However, a main drawback of these models is the rigid relationship between the characteristic length, l_c , the fracture stress, σ_c , and the fracture energy, G_c . As illustrated in this work, the resulting characteristic length can be too large compared with the structure size, potentially leading to unphysical solutions. To address this issue, Cuvilliez et al. [2] proposed a cohesive damage gradient model that allows G_c , σ_c , and l_c to be chosen independently enabling more accurate and flexible modeling of crack nucleation and propagation in complex scenarios.

More specifically, we will illustrate their application to describe the crack network generated by thermal shocks using the micromorphic approach (details given later) presented in [4].

Variational gradient damage models are advantageous because their numerical solution reduces to a constrained minimization problem over the discretized displacement u and damage field α , which continuously describe cracks. Nevertheless, challenges remain due to the non-convexity of the Lagrangian and the enforcement of the irreversibility of the nonlocal variable α .

Regarding the irreversibility constraint, we follow the work of Siedel et al. [9], where a micromorphic approximation has been introduced. The micromorphic approach has the advantage of enforcing the irreversibility constraint at the integration point while still being variational and is able to approximate most damage gradient models with a unified implementation. It has however the disadvantage of introducing a penalisation coefficient which has no physical interpretation.

The impact of this penalisation coefficient will be presented in [5, 6]. This penalisation coefficient can be replaced by a Lagrange multiplier [8], at the cost of introducing an additional degree of freedom and having to solve a saddle point problem.

In this talk, we leverage the Hybrid High Order method (HHO) [3] to introduce a new strategy allowing a robust treatment of irreversibility: the Lagrange multiplier is eliminated locally by static condensation.

We also highlight some key advantages of HHO compared to standard FEM method, HHO considering more general non conformal meshes and thus giving more flexibility in adaptive mesh refinement techniques.

References

- [1] Bourdin, B. , Francfort, G. A. and Marigo, J.-J., *Numerical Experiments in Revisited Brittle Fracture*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, pp. 797–826, 2000.

- [2] Cuvilliez, S., Feyel, F., Lorentz, E., and Michel-Ponnelle, S. *A Finite Element Approach Coupling a Continuous Gradient Damage Model and a Cohesive Zone Model within the Framework of Quasi-Brittle Failure*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vols. 237–240, pp. 244–259, 2012. doi:10.1016/j.cma.2012.04.019
- [3] Di Pietro, D. A., and Ern, A. *A Hybrid High-Order Locking-Free Method for Linear Elasticity on General Meshes*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 283, pp. 1–21, 2015. doi:10.1016/j.cma.2014.09.009
- [4] Nava Soto, P., Fandeur, O., Siedel, D., Helfer, T., Besson, J., et Scherer, J.-M. *Description of Thermal Shocks Using Micromorphic Damage Gradient Models*. 12th European Solid Mechanics Conference (ESMC 2025), Juin 2025, Lyon, France.
- [5] Nava Soto P., Helfer T. , Scherer J.-M. , Fandeur O., Jacon A., Besson J. *Numerical assessment of a micromorphic approach to approximate cohesive damage gradient models: role of the penalisation factor* CSMA 2026 17ème Colloque National en Calcul des Structures 18-22 Mai 2026, Presqu’île de Giens (Var)
- [6] Nava Soto P., Helfer T. , Scherer J.-M. , Fandeur O., Jacon A., Besson J. *Micromorphic variational cohesive gradient damage models to describe brittle fracture discretized by the Hybrid High Order method* 17th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) 10 th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS) 19 - 24 July 2026, Munich, Germany
- [7] Pham, K., Amor, H., Marigo, J.-J. and Corrado, M. *Gradient Damage Models and Their Use to Approximate Brittle Fracture*, International Journal of Damage Mechanics, pp. 618-652., 2010.
- [8] Scherer, J.-M., Phalke, V., Besson, J., Forest, S., Hure, J., and Tanguy, B. *Lagrange multiplier based vs micromorphic gradient-enhanced rate-(in)dependent crystal plasticity modelling and simulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 372, 113426, 2020.
- [9] Seidel, D. *Une approche numérique robuste pour la description de la rupture fragile et du comportement viscoplastique des crayons de combustible*. Ph.D. thesis, Université Paris Sciences et Lettres, 2023.

A Hybrid High-Order method for non-local damage models in large deformations

Nicolas Pignet, EDF R&D

This work [1] is an extension to Hybrid High-Order methods of non-local damage models developed for mixed Lagrange formulations. A additional scalar α field is introduced in addition to the primal displacement field u .

The non-locality comes from that a Laplacian has been added in the energy term. After discretization, in the case of a local constitutive relation, the computation of the constitutive law is generally pointwise at the quadrature points and it is supposed independent to the others. This independency is lost in introducing the variable $\nabla \alpha$ since the non-locality involves the constitutive law itself, i.e, the non-linearity resulting from the constitutive law (in particular, because of the plasticity threshold) is coupled with the spatial non-locality. In order to keep this splitting between the non-linearity and the non-locality, a decomposition-coordination method has been proposed in [2] and already used in [3,4] for this kind of problem and ends up with an augmented Lagrangian. The idea is based on a relaxation, which consists in duplicating the variable of interest, i.e, the internal variable α . One instance of the variable is dedicated to non-locality α which is global and the other one to non-linearity α which remains local. A Lagrangian multiplier l is also introduced to enforce the equality between both variables α and α . In addition, a penalty term is introduced so as to enforce the former relation and to provide additional coercivity. A close relation with micromorphic models [5] can be noticed, except for the Lagrangian term. Indeed, the internal variable α plays the role of the micromorphic counterpart of the non-local variable α . However, an equality between both variables α and α is (weakly) enforced through the Lagrangian multiplier l . This framework is adapted to small and large deformations

The method has been implemented in code_aster and is available since version 17.4.0. Few numerical examples are presented for ductile and brittle fracture. Mixed FEM and primal HHO methods are compared.

References:

- [1] N. Pignet, A Hybrid High-Order method for non-local damage models in large deformations, In preparation.
- [2] Fortin M, Glowinski R. Augmented Lagrangian methods: applications to the numerical solution of boundary-value problems. 15. Elsevier . 1983.
- [3] Lorentz E, Godard V. Gradient damage models: Towards full-scale simulation. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2011;200: 1927–1944.
- [4] Zhang Y, Lorentz E, Besson J. Ductile damage modelling with locking-free regularised GTN model. International Journal for Numerical Methods in Engineering 2018; 113: 1871–903.